<u>14.03.2014</u>

XII открытая олимпиада по математике УО «ГГТУ им. П.О.Сухого»

10-11 класс (школьники)

$\boxed{1.}$ а) В одном государстве (сказочном) не найдется двух человек, у которых оказался бы одинаковый состав зубов: либо у них разное число зубов, либо зубов нет в разных местах. Оцените наибольшую численность населения в этом государстве, если максимальное число зубов у одного человека 32.

Ответ: Не больше 2^{32}.

б) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,5? Сколько из них делится на 5?

Решение. Пусть $xyzab$ - пятизначное число. Всего их будет $4\cdot 5^4$ (x может принимать лишь 4 значения: 1,2,3,5, при этом y, z, a, b - все 5 значений).

На 5 делятся числа $xyza0$ и $xyza5$, а их число $4\cdot 5^3\cdot 2$.

Ответ: 2500; 1000.

$\boxed{2.}$ При каких значениях параметра k сумма квадратов корней уравнения $x^2-2kx+2k^2-6k+8=0$ является наименьшей?

Решение. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения. Тогда $x_1+x_2=2k$, $x_1x_2=2k^2-6k+8$. Учтем условие существования действительных корней, а именно: $D=4k^2-4(2k^2-6k+8)\ge 0$, тогда $k^2-6k+8\le 0$ и $k\in[2,4]$.

Тогда сумма квадратов корней уравнения

$$S=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12k-16\ge 0,\quad k\ge 3/2.$$

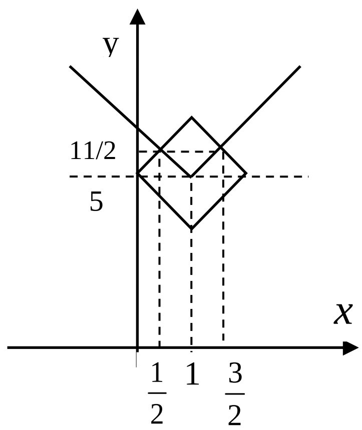
С учетом того, что $k\in[2,4]$, наименьшее $k=2$, $S=8$.

Ответ: $k=2$, $S=8$.

$\boxed{3.}$ Решить систему: $\begin{cases}|x-1|+|y-5|=1,\\ y=5+|x-1|.\end{cases}$

Решение. См. рисунок. Ищем точки пересечения квадрата и ломаной.

Ответ: $\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$.



$\boxed{4.}$ В уравнении параболы $y=ax^2+bx+c$ подберите постоянные коэффициенты a, b и c так, чтобы парабола касалась прямой $y=x$ при $x=1$ и проходила через точку $(-1;0)$.

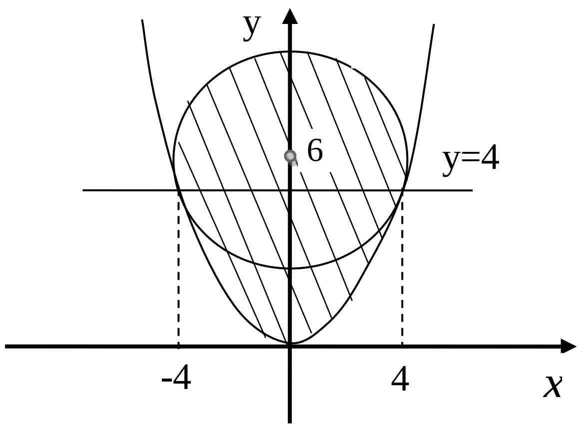
Решение: $\begin{cases}y'(1)=1,\\ y(1)=1,\\ y(-1)=0,\end{cases}$ $\begin{cases}2a+b=1,\\ a+b+c=1,\\ a-b+c=0,\end{cases}$ следовательно, $b=\frac{1}{2}$, $a=c=\frac{1}{4}$.

Ответ: $b=\frac{1}{2}$, $a=c=\frac{1}{4}$.

$\boxed{5.}$ На плоскости Oxy построить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y-4\le\sqrt{4y-x^2}$.

Решение: *1)* $\begin{cases} y-4<0, \\ 4y-x^2\ge 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y<4, \\ y\ge\dfrac{x^2}{4}, \end{cases}$ - множество точек, расположенных ниже прямой $y=4$ и выше параболы $y=\dfrac{x^2}{4}$.

2) $\begin{cases} y-4\ge 0, \\ (y-4)^2\le 4y-x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ge 4, \\ x^2+(y-6)^2\le 20, \end{cases}$ - множество точек, расположенных выше прямой $y=4$ и внутри круга с центром в точке $(0,6)$ и радиусом $\sqrt{20}$.



(Точки $(-4,4),(4,4)$ - точки касания параболы, окружности и прямой).

$\boxed{6.}$ При каких $x\in R$ числа $\sqrt{x^2+2x+1}$, $\dfrac{x^2+3x-1}{3}$, $x-1$, взятые в указанном порядке, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

Решение: Сумма 1-го и 3-го членов арифметической прогрессии равна удвоенному 2-му члену: $\sqrt{x^2+2x+1}+x-1=2\,\dfrac{x^2+3x-1}{3}$,

$|x+1|+x-1=2\,\dfrac{x^2+3x-1}{3}$, $\qquad 3|x+1|+3(x-1)=2(x^2+3x-1)$.

Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$\begin{cases} x+1\ge 0, \\ 2x^2+3x-3(x+1)+1=0, \end{cases}$ *или* $\begin{cases} x+1<0, \\ 2x^2+3x+3(x+1)+1=0, \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge -1, \\ x^2=1, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x<-1, \\ x^2+3x+2=0. \end{cases}$

Ответ: $x\in\{-1;1;-2\}$.

$\boxed{7.}$ Доказать: $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}<1-\dfrac{1}{n}$, $\quad n\in N$.

Решение: Так как $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$, тогда

$\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}<1-\dfrac{1}{n}$, $\quad$ ч.т.д.